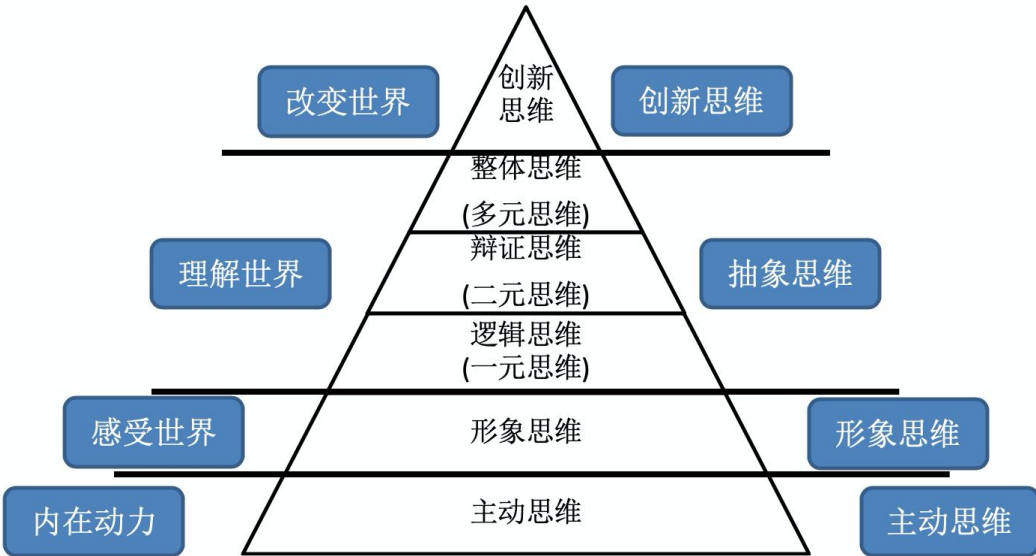


理科与文科思维有区别吗？有什么区别？

要在理科学习上通透，需要整体思维能力的出色。



上述思维能力，相互影响，构成了我们思维体系。

通用思维	特征	通用思维组
主动思维	内在驱动力	
形象思维	直观感觉	
逻辑思维	一元思维	归纳与演绎
辩证思维	二元思维	简化与演化、正向与逆向、普遍与特殊 抽象与具象、收敛与发散、精准与探索 已知与未知、定性与定量
整体思维	多元思维	整体与局部（既见树木、又见森林） 个体与联系（既见个体、也见关系） 战略与战术
创新思维	质量创新	

我们的人生，有三件事情：

- 感受世界
- 理解世界
- 改变世界

对这三件事情，对应着三种类型的思维能力：

- 感受世界 => 形象思维（关注经验、直觉、感受，注重建立经验、形象化的意识和能力，产生听觉、视觉、触觉、动感等）
- 理解世界 => 抽象思维（从形象层面升级，产生抽象概念、模型，理解形象背后的抽象规律）
- 改变世界 => 创新思维（打破常规、创造出新事物、新观念、新科技）

这三种类型的思维能力，阐述了能力问题。然而，为什么人们要去感受、去理解、去改变？

这就涉及到动机问题。

人的内在驱动力，跟主动思维的关系密切。强烈的好奇心、探索欲、追求卓越的精神、高度责任感，这些往往都是高度主动心态的产物。

没有高度主动的思维，那么就容易停留于表面，被动的接受现状、服从安排。比如老师叫做什么就做什么，不会就死记硬背，缺乏深入学习、思考的动机。

我们看学习顶尖的人，往往他们主动性强，不是因为「老师、爸妈让我学习」，而是自己就想要学习爱学习。

他们也有自己的学习思路、打法、规划，不会盲目遵循老师、学校的安排。

他们不满足于答案，而是会提出各种问题、去探索研究。

这些，都是高度主动性的体现。

三个层次的抽象思维

在抽象思维的范畴，又有三种思维：

- 逻辑思维（一元思维）
- 辩证思维（二元思维）
- 整体思维（多元思维）

一个常见的误区是，把「逻辑思维」等同于「抽象思维」。

真正顶尖的抽象思考、把握本质的能力，是需要上述三者的共同作用。

我见到一些顶尖高校的同学，他们都是经过严格的筛选进入一流学校的，逻辑思考能力不错。但是缺乏大局观，容易钻牛角尖。

单从他们的那个逻辑链条看吧，未必有问题，推理链条严谨；但整体思维欠缺，难以把握整体形势，最后还是搞不定。

这背后是整体思维、辩证思维的缺失。

形象思维不过关，是理科学习的普遍瓶颈

形象思维能力，包含两部分内容：

- 意识层面：关注重视生动、具体、直观（形象化）的经验和感受
- 能力层面：善于捕捉、获取、创造生动直观具体（形象化）的经验和感受

一个普遍的迷思是，大多数人认为，中学数理化成绩不佳，是逻辑思维差，因此导致理解水平不够。

其实中学数理化，从高考的角度来看，对学生逻辑思考能力的要求并不高。

例如数学 135 水平，需要的逻辑能力，是大多数同学经过基本训练，没有特殊难度就足够的。

中学理科学不好，首先遇到的瓶颈不是逻辑思维，而是形象思维。

作为自然界的高等级兵种，人类这种生物进化出来了独特的功能：大脑。而基于大脑，我们又产生了特殊的能力：创造和理解各种抽象语言。例如文字、数学公式，都是从现实中抽象出来的语言。

抽象思维，是大脑的功能。

然而，要让抽象思维工作，我们往往还需要具体的体验、感受，而这就需要依靠生物的原始功能：视觉、触觉、味觉等。

在理解世界之前，我们先要感受世界。

理解能力跟抽象思维密切相关，而感受能力则跟形象思维密切相关。

数学常常是学渣的噩梦，其中一个原因就是数学本身是高度抽象的，我们看到各种公式符号，也许连基本的意思都没搞懂，更别说他们背后的意义，与现实的关联。

所以在大脑中，没有与这些抽象语言对应的基本体验，也就谈不上理解和掌控。甚至反过来，久而久之就产生恐惧感。

而形象思维水平高的人，会主动的寻求建立形象化。

本书前面谈到，上个世纪，有位全国特级教师马芯兰，她在小学数学教育方面卓有成效，经验总结为了「马芯兰教学法」。她的实践中，就包含强烈的形象思维。

举个例子，今天我们对 111 这个数字中，三个 1 所代表的不同含义，已经清楚了。但是想想你作为一个几岁的小朋友，在最开始接触到数学进位制计数法是，会很容易搞清楚十位上的 1 还是个位上的 1 有什么区别吗？

为了帮助学生建立直观的概念，马芯兰设计了一些滚筒，把它们排成一行。最右边的代表个位，然后是十位、百位…

然后用小棍子代表 1，放到个位筒里。当有 10 个棍子的时候，就把它困成一扎，放到十位筒里。这样一来，就直观表示了十位筒的「1」和个位上的「1」的差别。让学生对于进位制有了直观的认识，从而在符号语言与具体感觉上，建立起了桥梁。

而其实只要对进位的理解突破，小学前三年级，基本上也就是一路平川了。

有个基本的数学思维叫数形结合，背后也蕴含着形象思维的理念。

所以「数形结合」，在学习数学中是一条基本的指导原则。它其实就是形象化思维，在数学学习科目中具体应用。

对于形象思维能力出色的人，他们遇到抽象概念，本能就会去建立直观经验、感觉联系。

但大多数人并没有这种形象思维的基本意识，所以他们会接受概念和感官脱节的状况，生硬的记忆套用，而不去寻求解决形象体验、直觉问题。

巧妇难为无米之炊，缺乏形象直观的经验、感觉作为基础，你的抽象思考引擎是开动不起来的。

再比如物理，很多时候同学其实卡在一个地方，就是难以把文字描述，转化一个头脑中可以理解的生动场景，例如物体运动的具体情境。

在中学学习中，我们也可以经常看到，一些日常生活中被认为是头脑聪明、思考敏捷的同学，也卡在数理科目上。

往往他们形象化这一步就没过去。

案例：高形象思维水平的对话

上次有位学习者，在使用知识森林学习软件。问我一个问题：

软件里有两个概念：项目和卡片空间。我觉得不太理解，你能举一个现实中的比喻，类比它们之间的关系吗？

我想了想说：

想象你去吃自助餐。卡片空间就像选餐的地方，啥菜都摆在那里，你可以挑。但菜太多了，不可能什么都吃，也够不着。

而项目就像是你的餐盘，你到选餐的地方把菜选出来，这样准备开吃。

他就说「这下我懂了」。

你看，他问这个问题，是主动的想要把这两个抽象概念形象化，因此要求我举一个现实生活中的比喻。

体现出意识层面的水平，关注重视形象化的经验和感受。

而我真能快速的给他想出一个比喻，这是我的形象化能力。也是基于长期具备形象化意识，持续去捕捉、获取和创造形象化经验感受的沉淀。

案例：知识体系的具象化

我们都知道，学习是要建立起强大的知识体系。

然而知识体系看不见摸不着，也就难以提升。

如果你的形象思维能力强，那自然就会引出一个思考：如何让知识体系看得见摸得着呢？变成一个具像化的事物？

这里最简单的手段，就是在纸上推导知识体系，画出来。

但因为纸张大小的限制，面对学科级别的知识体系网络（几百甚至上千知识点），那就完全无能为力了。

前面介绍的知识森林学习软件，从形象思维的角度，就是在用数字化手段，来实现知识体系的形象化。

而且这里面有好几个层面的形象化：

- 1) 知识体系的形象化（最早我用长方形代表知识点、椭圆代表案例、连线代表关系，这样知识体系就看得见摸得着了）
- 2) 知识体系建构动作的形象化（在软件中创建知识点、在知识点之间进行连线），这样不仅仅是静态的图像，而且过程动作也形象化了
- 3) 脉络线的形象化（用粗线条表示关系脉络线，这样关系的重要程度也形象化了，就像公路网络中的主干线和次要线路）

4) 掌握度的形象化（用不同的颜色表示不同掌握度，例如一种方案是，模拟交通中的红灯黄灯绿灯，来表示不同知识点的掌握度，绿色表示充分掌握、黄色表示存在问题、红色表示问题严重）

5) 更进一步的，用战争、战略游戏的概念来生动化形象化学习（用城堡的图标表示知识点、塔楼的图标表示案例题目、高度掌握之后在城堡边显示红旗，这样知识地图，感觉就像是战争、战略游戏中的全局地图）

案例：有理数和无理数概念的形象化

形象化的另外一个重要手段，是去探索概念知识背后的故事、案例。

为什么产生这样的概念，有什么样的背景？它的用途是什么？

这样也是在把一个抽象概念，还原到它产生的环境中，从而使之具体化。

例如，初中数学上来就引出了有理数的概念，后来又引出无理数。

到底为什么要叫做有理数和无理数呢？有什么背景呢？

我以前研究挖掘这两个概念的背景，挖出了一桩谋杀案。

公元前 500 年左右，希腊发生了一起谋杀案。一个人因为解出了一道证明题，被扔到大海里，灭口了。

为什么做对题了，要被灭口呢？

这道题目证出来之后，引发了一个惊天的危机。以至于人们决定杀人灭口，以掩盖可能出现的更大的后果。

理解了这道证明题，以及它引发的惨案，你不仅仅是理解了有理数和无理数的来历，对理科学习的意义和打开方式，也就有了更深刻的认识。

算术不是算术

我们对数学的学习，是从算术开始的。

「算术」这个词，源于中国，我们古代就有「九章算术」一书。顾名思义，算术就是计算的技术，一种技能。这也是小学阶段，学生数学学习的重点。例如加减乘法的计算。

概括而言，在中文语境中，「算术」非常明显的指向技能。

在古希腊，柏拉图提出了「七艺」的概念，也就是教育的 7 门科目：算术、几何、天文、音乐，以及文法、修辞、辩证法。

问题来了，这里我们讲希腊的算术，对应着英文的 arithmetic，它的核心其实并非计算的技术。

对这个词，英文词典的解释是「the branch of mathematics dealing with the properties and manipulation of numbers」，大意是，研究数的性质和操作的数学分支。用今天的数学学科分类而言，它更倾向于数论。

从这个角度，arithmetic 更多的是一种智能，关注的是理解数的性质、数的操作。

然而最终，在翻译的时候，「arithmetic」成为了「算术」，失去了它原本的含义，给人造成了自然的误导。

这一误导在数学教育上的体现，就是学校、老师关注计算，却忽略了让学生充分理解、研究数的概念、性质、关系。这一问题在初中一年级，有个明显的表现，就是一大堆学生，都不理解到底什么是「有理数」，什么是「无理数」。

毕达哥拉斯学派

在古希腊，谈到对算术（arithmetic）的研究，就需要谈到毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯诞生于靠近小亚细亚海岸的萨摩斯岛。在四处游学之后，他成立了一个兼具宗教、科学、哲学性质的帮派，也就是毕达哥拉斯学派。

这个学派有人员的限制，内部传授知识，并且对外保密。

毕达哥拉斯学派有一个基本信仰：万物皆数。他们相信数代表了真理，可以解释万物。

可能他们的信仰，更进一步。亚里斯多德说，毕达哥拉斯学派，把数看做真实物质世界的最终组成部分（类似于今天科学中的原子概念了）。

在那个时代，人们认识的数，是像 1、2、3 这种我们日常经验可以感知的数，也就是整数（严格的说是正整数）。

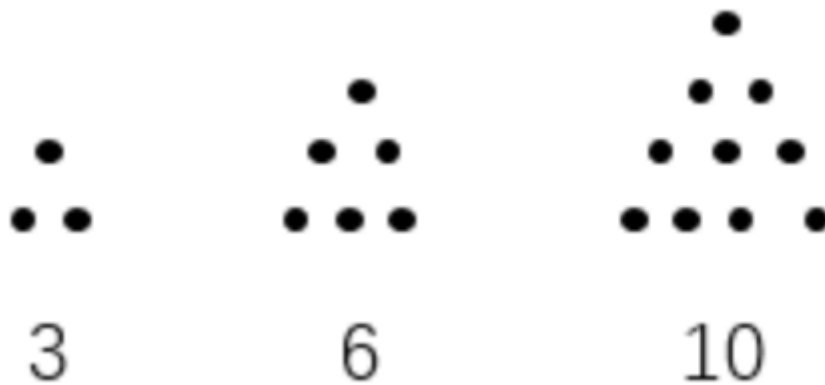
所以毕达哥拉斯学派认为，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

对数的研究

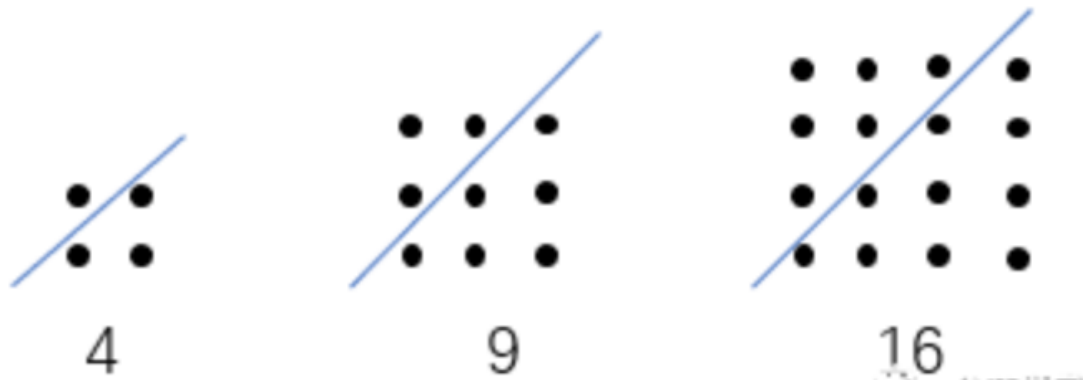
基于他们的信仰，毕达哥拉斯学派，对数作了很多研究。

例如，他们经常把数描述成沙滩上的点或小石子，根据点的形状，对数进行分类。

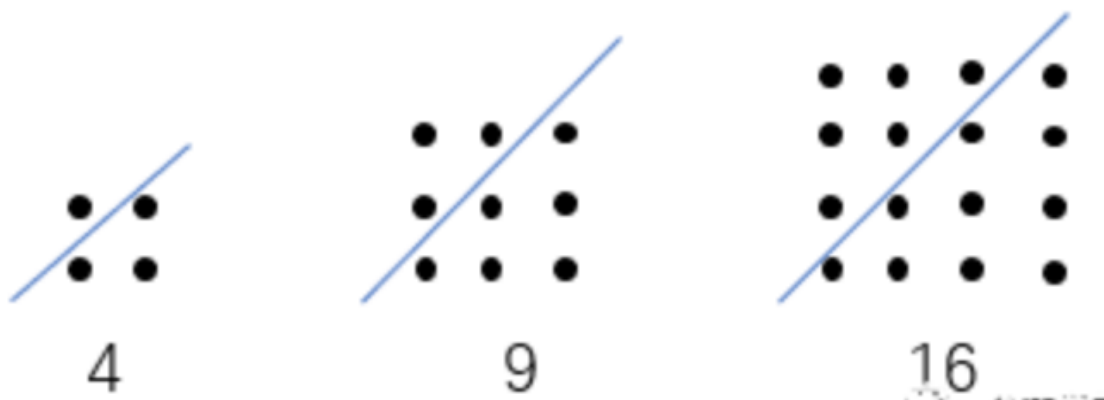
对于 1、3、6、10 这样的数，他们称之为三角形数，因为这些数可以摆成正三角形：



对于 1、4、9、16 这样的数，他们称为正方形数。



当把点摆成图形，整数的一些性质就变得明显。例如，对正方形数画一道斜杠，就会发现，相继两个三角形数之和，是正方形数。



从上面的例子中可以看到，毕达哥拉斯学派，在研究整数的性质，基于整数的性质进行归类，研究整数之间的相互关系（三角形数、正方形数的关系）。

这些研究、分析、调查、判断活动，是典型的智力活动，而非单纯刷熟练度的计算。

另外这里也可以看到，在研究数的过程中，毕达哥拉斯学派，使用了数形结合的方式，这也是形象思维的体现。

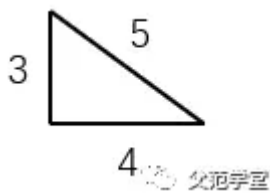
很多同学每天拼命背概念刷题，但思维水平低下，例如缺乏形象化意识，也就很难有突破。

所以千万别只顾闷头干活，一定要提升自己的思维层次。

毕达哥拉斯定理

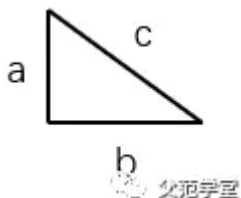
毕达哥拉斯学派，在几何方面也做了很多研究。其中最为著名的，是毕达哥拉斯定理。

中国古代有勾三股四弦五的发现，简单的说，就是对于直角三角形，如果直角边是 3、4，那么斜边长度为 5。



这一发现背后，有一个普遍的结论，就是对于直角三角形，两直角边长度的平方之和，等于斜边长度的平方。也就是

$$a^2 + b^2 = c^2$$



这里要注意的是，猜想和证明是两回事。

例如我们如下的直角边与斜边组合：

- 3、4、5
- 5、12、13

$$3^2+4^2=5^2$$

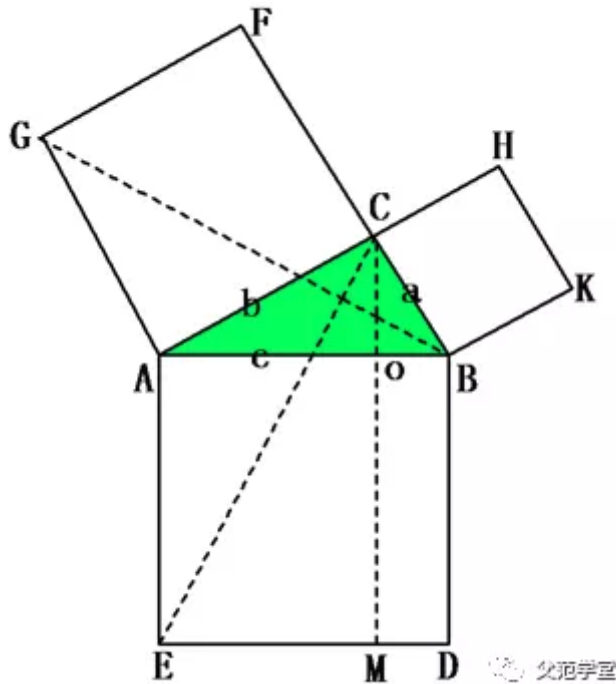
$$5^2+12^2=13^2$$

我们猜想对于直角三角形，有 $a^2+b^2=c^2$

我们可以尝试再找例子进行验证，但这些都是有限的情况。如果保证对所有的直角三角形，这一关系都成立呢？这就需要证明。

这个定理有很多的证法，其中一个普遍的思路，是把代数等式证明，转化为面积相等问题。

例如下图所示，证明两个正方形面积之和等于第三个正方形。



其实这个可以从观察等式中看出， $a \cdot a$ 的一个几何意义，是长度为 a 的正方形面积。

尽管在人类不同的文明中，都发现了勾股定律的现象。但是数学证明这种思维，却是古代希腊人独特的贡献。

克莱因说，「希腊人坚持要演绎证明，这也确是了不起的一步。在世界上的几百种文明里，有的的确也搞出了一种粗陋的算术和几何。但只有希腊人才想到要完全用演绎推理来证明结论」

数学证明引发的谋杀案

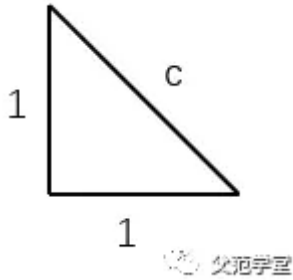
在证明了毕达哥拉斯定理之后，传说毕达哥拉斯学派欣喜若狂，杀了 100 头牛祭祀庆祝。

然而，好景不长。这个定理的证明，对于毕达哥拉斯学派而言，如同打开了潘多拉的魔盒。它释放出了一个幽灵，引发了

一场恐慌，并且产生了大概是人类历史上，第一次因为解出了数学题，而导致被杀人灭口的谋杀事件。

这个幽灵是什么呢？

如果我们做一个直角边长为 1 的等腰直角三角形。



那么根据毕达哥拉斯定理，有 $1*1+1*1=c*c$

化简之后可得 $c*c=2$ 。

前面我们谈到，毕达哥拉斯学派信仰「万物皆数」。他们认为，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

首先， c 不是一个整数（1 之后的最小整数是 2，而 c 大于 1 小于 2）。

那么，按照毕达哥斯拉的理念， c 应该可以表达为两个整数之比。

然而，在毕达哥拉斯学派中，有一个人叫做希帕苏斯。他证明，这个 c 不能表达为整数之比。

他是怎么证明的呢？

反证法的应用

希帕苏斯使用了反证法。

他首先假设， c 能够表达为两个整数之比，也就是假设 $c=p/q$ （这里 p 、 q 互质，否则还是可以化简得到一个互质的 p 、 q 形式）。

这样一来， $(p/q) * (p/q) = 2$ ，化简之后得到 $p*p=2*q*q$ 。

因为 p 和 q 互质，那么 p 、 q 最多只能有一个偶数（否则还可以继续化简）。

又因为 $p*p=2*q*q$ ，也就是说 $p*p$ 必然是偶数，那么 p 必然是偶数。

这样一来， q 就必然是奇数。

既然 q 是奇数，等式的右边（ $2*q*q$ ），一共就只有一个 2 的因子。

然而，在等式的左边，因为 p 是偶数，那么 p 至少有一个 2 的因子。 $p*p$ 至少有两个 2 的因子。

这样一来，等式左边和右边不能相等。

因此，我们最开始的假设（ c 能够表达为两个整数之比）是错误的， c 不能表达为两个整数之比。

这是一个非常漂亮的证明。希帕苏斯使用的，是一些基本的整数和运算性质，例如奇偶性、整数的因数。反证法的应用很精彩。

这里又要强调了，在这个证明中，计算非常简单，重点是在研究数的性质，进行逻辑推理，又是一个智能导向的活动。这是希腊「算术」的基本精神。

狂热的信仰

希帕苏斯的证明非常漂亮，无懈可击。

然而这个证明，直接跟毕达哥拉斯学派的基本理念相冲突。

毕达哥拉斯学派信仰「万物皆数」。他们认为，数字代表了真理，任何事物，都可以表达为整数，或者整数的比。

今天，居然有了既不是整数，也不能表达为整数的比的长度。那么，「万物皆数」就站不住脚了。

从数学史的角度，这件事情称为第一次数学危机。

如果单纯从科学研究的角度，站不住脚是好事，证明理论研究有了新方向、新突破。承认问题，继续研究就行了呗。

但是如果从宗教信仰的角度，那就不一样了，「神」不灵了，世界崩溃了。

那怎么办呢？不能解决问题，但是可以解决提出问题的人啊。

于是希帕苏斯被扔到海里喂鱼了。

可比数 VS 不可比数

尽管希帕苏斯成了倒霉蛋，但他所发现的事实，依然存在。

这就导致了新的概念的产生，希腊人现在意识到，不是所有事物，都可以表达为两个整数之比的。

于是，希腊人有了「可比」（也翻译为「可公度」，和「不可比」（不可公度）的概念。

在希腊文中，希腊人用「 $\lambda o \gamma o \varsigma$ 」，表示「可比之数」。而这个翻译到英文，比例的词根是 *ratio*，可比之数也就翻译成了 *rational number*，不可比之数则翻译成了 *irrational number*。

从直观容易理解的角度，其实有理数更浅显的翻译，应该是「比数」。而无理数，则是「不可比数」或者「非比数」。例如 $c*c=2$ ，这个 c 就是不可比的数。

从另外一方面，*rational* 和 *irrational*，本来也就是「理性」和「非理性」的意思。

毕达哥拉斯学派，学习数学是为了追求理性（虽然矛盾的他们又有对数的强烈的带有宗教性质的迷信色彩），他们认为数就代表了理性、能解释万物运作，所有事物都可以表达为整数和整数之比。

理解了在他们心目中，数与理性的关系，那么对有理数和无理数的概念，也就容易掌握。

儿子生爸爸

有个笑话说，妈妈问儿子，是爸爸大还是儿子大。

儿子说：一样大。

妈妈问为什么啊。

儿子说，因为生了我，爸爸才当爸爸的。

看上去是笑话，但背后却有一个道理。固然从生物体的角度，是先有爸爸这个人，再有儿子。

但从概念的角度，「爸爸」这个概念，却要从属于「儿子」这个概念。没有「儿子」，就没有「爸爸」。

如果脱离了「儿子」的概念，单纯讲「爸爸」，在现实生活中，我们一定觉得很荒谬。

但是在数学教科书里，这种逻辑上的脱节却是普遍的。用人教版初中数学教材为例，初一上引入「有理数」的概念，说「整数和分数统称有理数」。初一下又跳出无理数的概念。

然而从逻辑上，这两个概念是配套的。正因为发现了不可比的数，才需要一个「可比数」的概念来区分。否则就像希腊人之前那样，没有发现不可比的数，也就没必要叫「可比数」。本来数都是可比的，那还要这个概念干嘛。

教材把概念都搞得支离破碎，就难怪学生普遍缺乏对概念的理解了。

反过来，这也是为什么，你需要溯本求源，回到概念产生的原始现场。

形象化基本手段：研究故事和案例

围绕「有理数和无理数」的概念，前面分享了相关的背景故事。

对故事案例的研究，是学习抽象概念知识、使之形象化的基本手段。

一流的老师，往往不仅仅是讲课本知识，而且还能扯出各种背景故事，让你融入其中，从而让抽象理念，变得鲜活起来。

我高中的时候，特别喜欢数学老师上课，因为他能讲出各种各样的故事，比如费马当时就是个律师，但是业余喜欢研究数学。有一天他在一本书的空白处写上，我证明了 balbalbal，但是这里写不下…。于是后来一啷啦人都去尝试证明费马写下的命题……

他上课往往讲这种故事就天南海北了，也未必跟数学有关系。

我学生时代唯一喜欢的拖堂，就是这种因为扯故事太远而收不回来的状况。

记得有次我的同学说，老师上课尽扯一些没用的。

我说，这些才是真正有用的啊。课本上的东西，自己看就好了。

也许你没有遇到这样的老师，但是可以自己干啊。

最简单的，一个定义上网查一下，看看背后有什么来历。

平时也可以有意识的，去读学科历史方面的书籍。

举个例子，我最近枕头边的书《机械宇宙——艾克萨·牛顿、皇家学会与现代世界的诞生》。

对于缺乏对科学的基本历史认识的同学，推荐吴军老师的《文明之光》。其中涉及到对各个时期科学、技术的整体介绍和故事，可以作为入门启蒙。

实事求是：形象思维与抽象思维的协同

我们经常讲要「实事求是」。

这个成语分为两部分：

- 实事：重视现实的经验、事实，从实际出发
- 求是：寻求现实经验、事实背后的规律真相

「实事」，其实就是对现实经验事实的重视，做事情要深入一线，建立直接经验、感受现实。这是「形象思维」驱动。

而「求是」，则是寻求规律性，这是「抽象思维」驱动。

「实事」是基础，「求是」是升华。

所以「实事求是」听上去简单，要真正做到，对于形象思维和抽象思维都有要求。

这里有种情况，就是一个人可能逻辑思维能力强，但是形象思维弱，缺乏实事求是精神，活在自己的逻辑链条里。

例如美军《生活大爆炸》里面的谢尔顿，逻辑能力强，缺乏、忽视现实生活的一线经验。因此做事情容易从自身的经验和逻辑出发（而非从实际状况出发），看上去就不接地气。

这一点，是很多头脑聪明、逻辑能力不错的人的通病。

以中学理科的难度，你努力而成绩低迷，往往跟是不是聪明没大关系。大多数人都足够聪明到能学好中学理科。反而有实事求是精神，更为重要。

有句话说：

专家 = 狭隘的经验 + 过度总结

我在知乎上写文章，通常评论区就能看到很多「专家」。

例如写如何通透学习，总有人在下面回复一句话诸如：

- 学数学就是要刷题
- 关键还是头脑要好

他们通常都没看我的内容，就已经有了结论，已经觉得自己有了丰富的经验，足以做出判断总结。

这种人，一线经验事实掌握的很少很片面，但是做出判断结论很快很迅速。

非常的自以为是。

从教科书中来，到教科书中去

要学习「实事求是」，推荐你读《毛泽东选集》。

例如毛选第一卷，有一篇《寻乌调查》。

寻乌是一个县城，毛泽东在这篇文章，把寻乌县有什么产业、这些产业的从业者都是来自哪里、相互有什么关系，都写的很清楚，这些都是仔细的调研的结果。

看了这篇文章，我当时感想就是，别的不说，有这种踏实做事的作风，在大多数领域，都能成就一番事情了。

共产党讲「从群众中来，到群众中去」。到一个村庄，就要把每个人家都走访到，了解到不同人家的状况、相互关系。

这对于我们学习，类似于什么呢？

我们的中学学习，要做到「从教科书中来，到教科书中去」。教科书就像村庄，知识点就像农户。

到底有多少农户（知识点），一家一家拜访清楚。这就是「寻宝游戏」完成，你要把书上的知识点都能够识别出来，命名到位，这才是有初步的情况掌握。

然后这些农户（知识点）有什么关系，比如这一家是如何从那一家分出来的，这就是「连线游戏」的任务。

智慧教科书

标记内容 创建知识 前一页 7/265 后一页 隐藏目录 隐藏页面 隐藏地图 加链接 界面连线 组合包含 视图设置 后退 前进

政策纲领

基础教材

新课标A必修一

集合与常用逻辑用语

集合的概念

集合间的基本关系

集合的基本运算

阅读与思考 集合中元素的个数

充分条件与必要条件

全称量词与存在量词

阅读与思考 几何命题与充分条件、必要条件

小结

复习参考题1

一元一次函数、方程和不等式

函数的性质与概念

指数函数与对数函数

数学建模 建立函数模型解决实际问题

三角函数

部分中英文词汇索引

高考真题

1.1 集合的概念

在小学和初中，我们已经接触过一些集合。例如，自然数的集合，同一平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆）等。为了更有效地使用集合语言，我们需要进一步了解集合的有关知识。下面先从集合的含义开始。

看下面的例子：
(1) 1~10 之间的所有偶数；
(2) 立德中学今年入学的全体高一学生；
(3) 所有的正方形；
(4) 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有点；
(5) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有实数根；
(6) 地球上的四大洋。
例 (1) 中，我们把 1~10 之间的每一个偶数作为元素，这些元素的全体就是一个集合；同样地，例 (2) 中，把立德中学今年入学的每一位高一学生作为元素，这些元素的全体也是一个集合。

思考
上面的例 (3) 到例 (6) 也都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？

一般地，我们把研究对象统称为元素（element），把一些元素组成的总体叫做集合（set）（简称集）。

给定的集合，它的元素必须是确定的。也就是说，给定一个集合，那么一个元素在或不在这个集合中就确定了。例如，“1~10 之间的所有偶数”构成一个集合，2，4，6，8，10 是这个集合的元素，1，3，5，7，9，… 不是它的元素；“较小的数”不能构成集合，因为组成它的元素是不确定的。

不同的集合中的元素是不相同的，但是，集合中的元素是不重复出现的。
只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相同的。

我们通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于（belong to）集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于（not belong to）集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

集合的相等

集合的定义

集合元素的不确定性

集合元素的不确定性

集合元素的不确定性

属于与不属于

集合与元素的字母表示

常用数集及其记法

集合表示的描述法

集合表示的基本方法

示的描述法-缩略形式

做到这两者，才谈的上争取各家各户，成为支持革命的力量（占领游戏）。

1.1 集合的概念

在小学和初中，我们已经接触过一些集合。例如，自然数的集合，同一平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆）等。为了更有效地使用集合语言，我们需要进一步了解集合的有关知识。下面先从集合的含义开始。

看下面的例子：

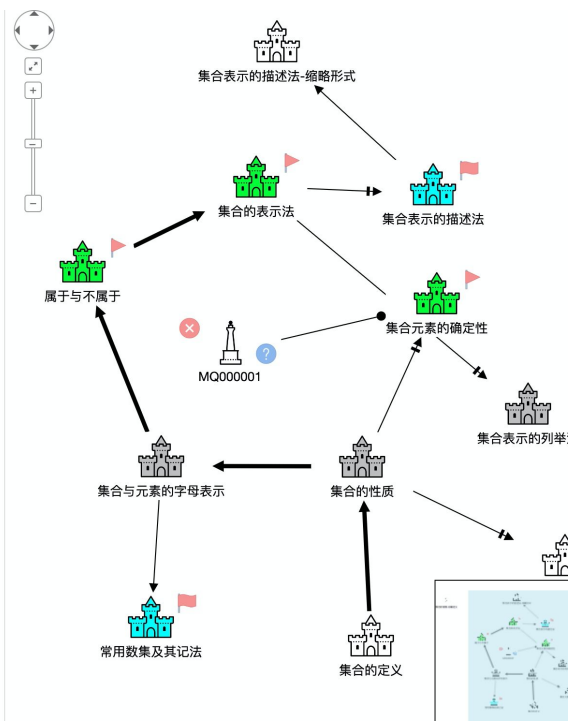
- (1) 1~10 之间的所有偶数；
- (2) 立德中学今年入学的全体高一学生；
- (3) 所有的正方形；
- (4) 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有点；
- (5) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实数根；
- (6) 地球上的四大洋。

例 (1) 中，我们把 1~10 之间的每一个偶数作为元素，这些元素的全体就是一个集合；同样地，例 (2) 中，把立德中学今年入学的每一位高一学生作为元素，这些元素的全体也是一个集合。

思考

上面的例 (3) 到例 (6) 也都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？

一般地，我们把研究对象统称为 元素 （element），把一些元素组成的总体叫做 集合 （set）（简称为 集 ）。
给定的集合，它的元素必须是确定的。也就是说，给定一个集合，那么一个元素在或不在这个集合中就确定了。例如，“1~10 之间的所有偶数”构成一个集合，2，4，6，8，10 是这个集合的元素，1，3，5，7，9，…不是它的元素；“较小的数”不能构成集合，因为它组成的元素是不确定的。
一个给定集合中的元素是互不相同的。也就是说，集合中的元素是不重复出现的。
只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是 相等的 。
我们通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的元素。
如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 （belong to）集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于 （not belong to）集合 A ，记作 $a \notin A$ 。



这样把工作做细致，领先大多数人，是自然的结果。

所以毛泽东在《反对本本主义》中说：

你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和它的历史吧！

你完完全全调查明白了，你对那个问题就有解决的办法了。

一切结论产生于调查情况的末尾，而不是在它的先头。

只有蠢人，才是他一个人，或者邀集一堆人，不作调查，而只是冥思苦索地「想办法」，「打主意」。须知这是一定不能想出什么好办法，打出什么好主意的。换一句话说，他一定要产生错办法和错主意。

他又说：

调研是十月怀胎，解决问题是一朝分娩。

从我们学习 3 步曲的角度，摸清楚书上有哪些知识点、知识点是如何互相联系的，建立知识体系，是调研、是十月怀胎。有这个基础，解题（一朝分娩）就是很自然的事情。

然而大多数同学反过来了，怀都没怀上就想直接抱个大胖小子。看上去天天在刷题，就是简单粗暴想要搞定问题，连到底书上有哪些知识点都没调查清楚。

高考吧，至少到 985 这一级，完全谈不上拼什么智力。

你只要做到调研扎实，把知识体系真的建立起来，干好寻宝和连线工作，也就行了。

想象力比知识更重要

想象力，也需要以形象思维作为基础。

爱因斯坦说：

想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着社会进步，并且是知识进化的源泉。

爱因斯坦在十多岁的时候，思考一个问题：「如果我的速度跟光一样快，会发生什么？」

他想象自己「乘」在一束光上。

他开始了「思想实验」。

例如，想象火车上的场景。

如果一个人站在火车上，而他的朋友在地面，一束光线照射在火车的头尾，他的朋友会同时看到亮光。但是，那个在火车上的人却感觉火车前进的方向早出现光亮。

爱因斯坦相信，火车里或地面所见不同说明时空是相对的、是可以变化的，这个实验也为建立狭义相对论打下基础。

爱因斯坦的很多成就，跟他的形象思维能力，关系密切。

这也是理科学习，甚至整个人生成长的基础思维要素。

逻辑思维：爱智求真、探索规律

逻辑这个词（logic），源于希腊文的 logos（逻各斯），logos 指的是内在的规律和本质。

所以我们讲要理解事物的逻辑，往往等同于理解事物的规律。

概要的说，逻辑思维观的核心，就是从「寻求规律」的角度，来看待事物和问题。

而要做到这一点，在情感上就需要有探索规律的热情。

民国科学家丁文江说：

科学是教育和修养最好的工具，学科学的人有求真理的能力，而且有爱真理的诚心。无论遇见甚么事，都能平心静气去分析研究，从复杂中求简单，从紊乱中求秩序；了然于宇宙生物心理种种的关系，才能够真知道生活的乐趣。

从这一点来看，熟练学习观的基本问题，就是忽略对规律的探求，只想要「记住」和「能用」，停留在事物的表面，非常肤浅。

而「热爱寻求规律」，会引申出 5 种思维。

引申思维 1：寻求建立联系

所谓规律，是事物之间的联系。

因此如果你要追求规律，自然的就会关注事物之间，到底有什么样的关联。

乔布斯说：

创造力就是找到事物之间的联系。当你问有创意的人他们是怎么做到的，他们会觉得有点点负罪感，因为他们并非真的「做到了」，他们只是看到了一些联系。有些事儿对他们就像是显而易见的。这是因为他们能把种种体验关联起来，并吐故纳新。他们能做到这点是因为他们有更多的体验，而且他们思考这些体验比其他人更多。

而在应试学习中，严重缺乏对关系的探索。

例如为什么你不理解呢，往往就是没能把新知识跟旧知识、或者日常经验联系起来。

而熟练学习观对这个问题，看法就是「先背下来」、「能用就行」。

长期下来，就阻碍了人对联系的探索。

因此在学习上，要树立逻辑思维观，你需要从今天开始，就持续开始提问：事物之间有什么关系。

落实到高中教材学习，一些基本问题就是：

- 为什么要学习这些知识？
- 本章本节的知识，相互有什么联系？
- 本章本节的知识，跟此前学过的知识，有什么关系？

引申思维 2：追求因果关系

事物间有两种基本的关系：相关性和因果性。

相关性是很宽泛的，只要两个事物有联系，他们就有相关性。

而因果性要严格很多，如果 A 导致 B，我们才认为他们有因果性。

在理论世界中，例如数学，容易有 100% 的因果性。而现实世界，很多时候 100% 的因果很难，因为影响因素很多。但如果 A 能大概率的导致 B，往往我们也认为是具备因果性。

对我们人类的头脑而言，有意识和潜意识。

潜意识的运作方式，是基于相关性的。例如「一朝被蛇咬，十年怕井绳」。

从因果性角度，你看到井绳根本不应该畏惧。因为这玩意不能来咬你。

为啥我们会有这种反应呢？

因为我们看到井绳，潜意识会联系到蛇的形状（相关性）。而从蛇的形状，有可能联系到被蛇咬过的情感体验，于是畏惧感产生。

在这里，基于相关性的潜意识运作，产生了一个情绪触发。然后我们意识介入，思考分析因果性之后，觉得没啥。

尽管相关性的判断是错误的，但它有一个非常大的优点，那就是相关性判断非常快速，而且节能。

因果性的分析，是人类大脑意识独有的功能，需要高阶逻辑能力的介入。

而逻辑思考功能，运作是非常耗费能量的。我们思考久了很容易累，就是因为太耗能，系统强制要你思考下线。

但潜意识的相关性判断，则可以用非常低的能量长期运作。比如你走路看到行人，自然就躲避。完全不用因果分析，直接潜意识完成。

我们看熟练学习观，其实就是从相关性的角度，来进行学习绩效的改进。

你不需要理解，只要看到一道题，本能的产生条件反射，觉得它该怎么做，那就行了。

本质上，走熟练路线，其实你的角色，跟巴甫洛夫的狗没啥差异，就是在做基于熟练度的相关性强化。

但即使单纯从学习绩效的角度，如果知识点越多、关系越复杂、组合可能性越多，驯化你产生简单条件反射，那种训练量可能成指数增长，你就完蛋了。

这是为啥很多同学小学成绩还可以，到中学就不行了；初中还可以，到高中就不行了；高中还可以，到大学就不行了；大学的优等生，出了社会就不行了。

因为往往越到后来，世界的复杂度急剧上升，你靠简单的表面相关性判断，根本就不足以应对。

越复杂的世界，你越需要理解，驱动这个复杂世界背后的原因，把握因果关系。

思考题：准高中生如何预习高中数学

在知乎上看到一个问题：「准高中生如何预习高中数学？」

提问者说：「即将进入高中，我开始预习高中数学，把高一数学教材翻了一遍，觉得头大完全看不懂，应该如何预习呢？」

看了一下各种回答，大致分为两种类型：

- 称赞这位同学很认真努力，说坚持看下去就有收获，要做笔记等等
- 推荐各种参考教辅资料，说这些教辅更全面

头大完全看不懂，是高中数学教科书这个世界，对他已经太复杂了。

那么如何简化呢？

我们就需要去探索，到底这个复杂的世界，是如何产生的。

那么高中数学教材，高中数学课程，又是如何产生的呢？

也就是说，导致「高中数学课程/教材」的原因是什么呢？

如果你顺着这个思路，那就会上溯到一个东西，就是教育部颁发的《普通高中数学课程标准》。

我们在教育部官网（<http://moe.gov.cn>）搜索「普通高中课程方案」，会发现相关的方案文档：



中华人民共和国教育部

Ministry of Education of the People's Republic of China

当前位置：首页 > 检索 > 全部

全部时间

时间不限

一周内

一月内

一年内

查询范围

所有结果

标题

正文

结果排序

按相关度升序

按相关度降序

时间升序

全部

机构

新闻

公开

服务

互动

文献

普通高中课程方案

搜索

为您找到相关结果 20 条，用时0.029秒。

教育部公布普通高中课程方案 劳动为必修课占6学分

本报北京6月3日电（中青报·中青网记者 樊未晨）今天，教育部公布了普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017年版2020年修订，以下简称“方案”），方案明确，劳动为必修课程，共6学分，其中志愿服务为2分，学生在课外时间进行，3年内不少于40小时。方案提出，体育与健康的...

发布时间：2020-06-04

教育部关于印发普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017年版2020年修订）的通知

各省、自治区、直辖市教育厅（教委），新疆生产建设兵团教育局：为深入贯彻党的十九届四中全会精神和全国教育大会精神，落实立德树人根本任务，完善中小学课程体系，我部组织对普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017年版）进行了修订。普通高中课程方案以及思想政...

发布时间：2020-06-03

教育部教材局：普通高中课程方案、课程标准及教材的修订情况

教育部教材局为落实中央关于立德树人要求，进一步深化基础教育课程改革，教育部组织专家对普通高中课程方案和课程标准进行修订，统编语文、历史、思想政治三科教材，修订其他非统编学科教材，情况如下。一、课程方案修订情况一是进一步明确了普通高中教育的定...

发布时间：2019-06-20

点击进入网页，下载相关文档解压，里面就包含了各科包括高中数学的课程标准。

名称	
▼	普通高中课程方案及20科课程标准（2017年版2020年修订）
	9.普通高中化学课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	8.普通高中物理课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	7.普通高中地理课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	6.普通高中历史课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	5.普通高中思想政治课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	4.普通高中英语课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	3.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	21.普通高中西班牙语课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	20.普通高中法语课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	2.普通高中语文课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	19.普通高中德语课程标准（2017年版2020年修订）.pdf
	18.普通高中俄语课程标准（2017年版2020年修订）.pdf

《普通高中数学课程标准》这份政策文件，规定了高中数学课程的指导原则、教学目标等。

一、 课程性质与基本理念	1
(一) 课程性质 / 1	
(二) 基本理念 / 2	
二、 学科核心素养与课程目标	4
(一) 学科核心素养 / 4	
(二) 课程目标 / 8	
三、 课程结构	9
(一) 设计依据 / 9	
(二) 结构 / 9	
(三) 学分与选课 / 11	
四、 课程内容	13
(一) 必修课程 / 13	
(二) 选择性必修课程 / 36	

各地的高中教科书，都是需要遵循这份课程标准，来进行设计的。是对其中标准的具体化。

例如下面，是关于对集合部分的掌握要求：

【内容要求】

内容包括：集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式。

1. 集合

在高中数学课程中，集合是刻画一类事物的语言和工具。本单元的学习，可以帮助学生使用集合的语言简洁、准确地表述数学的研究对象，学会用数学的语言表达和交流，积累数学抽象的经验。

内容包括：集合的概念与表示、集合的基本关系、集合的基本运算。

(1) 集合的概念与表示

①通过实例，了解集合的含义，理解元素与集合的属于关系。

②针对具体问题，能在自然语言和图形语言的基础上，用符号语言刻画集合。

③在具体情境中，了解全集与空集的含义。

(2) 集合的基本关系

理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。

(3) 集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义，能求两个集合的并集与交集。

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义，能求给定子集的补集。

上面这一页左右的掌握要求，落实到教材上，可能就落实、拓展成一章或者半章的内容了。

越是宏观的，越简洁。而越是往下走微观的，就越具体。

如果你是先看了课程标准，然后再看教材，就清晰很多。

就像地图在逐层次展开一样。

当时我让一位同学和家长看了课程标准，他们说：「这个掌握要求部分可以打下来，一条一条对照是不是掌握了，这样清晰很多」。

教育部的课程标准文件，是公开的。然而老师和同学，很少有人会去思考：

- 为什么高中课程/教材会这样设计呢？
- 导致他们的原因是什么呢？

顶尖的学习者，喜欢为「为什么」。为什么其实就是在上溯原因。

而应试学习观呢，典型的思维就是「别管为什么，会背会用就行」。

所以长期受到应试学习观熏陶的人，从发展的角度，比一张白纸的娃更糟糕。

比如儿童，天性就喜欢问为什么，尝试去探索因果关系。反而应试教育，在这方面是一种毒害。

引申思维 3：明确因果链条

如果我们关注对因果关系的探索，遇到一件事情，往上追溯原因，往下推演后果，最终会明晰因果链条。

所谓因果链条，是指一系列「原因→ 后果」构成的逻辑链。

对于 A、B、C，如果 A 导致 B，B 导致 C，那么我们可以认为这就构成了 A→B→C 的因果链。

为什么因果链这么重要呢？

有句话说：

智者畏因，愚者畏果。

这里的「畏」，可以理解为「敬畏、重视」。

这句话的意思是，大多数人，重视的是那个后果；而有智慧的人，重视的是那个原因。

例如从学习的角度，大致有如下的因果链：

指导思想领先→ 战术打法领先-武器装备领先→ 知识体系领先→ 解题轻松愉快→ 成绩优异

这条因果链拆解开来，大致就是：

- 解题是因，成绩是果
- 知识体系强大是因，能够轻松解题是果
- 学习战术打法是因，知识体系是果
- 指导思想是因，战术打法是果

大多数同学，最看重的是「成绩」，最终的那个结果。

例如，在数学学习中，背公式是超级糟糕的习惯，因为背说明你没有理解、不能推导。

但是老师、同学往往觉得「先背下来能做题就行了」。

但你都没理解，能做题又怎么样呢？

大不了你的考试成绩会好看一些。

然而，大多数日常考试的目的是什么呢？不就是为了评估你对知识的掌握和理解吗？

本来没搞清楚公式的，如果不背，考试成绩也能反应出来。

但你背了，测试不出来问题，「成绩」这个结果看上去还行，但前面那些「原因」的问题，却被掩盖了。

再比如，你的知识掌握度不行。而之所以知识掌握度不行，是学习方法有问题。

大多数老师、同学，敬畏「成绩」这个结果，却不尊重「思维、方法」这些深层次的原因。

所以他们持续搞不定。因为那些导致结果的原因，从来没有改变过。

还会持续产生大量没法理解、只能记忆、生搬硬套的知识。

真正有效的，是直接在深层原因上努力，从而实现一劳永逸的效果。

要做到这一点，就需要把握因果链条。

引申思维 4：做事流程严谨

理解了因果链条，明确了什么样的原因，会导致什么样的结果。

逻辑思维观强大的人，往往做事情就会遵循因果链条，流程严谨，循序渐进。

在知乎上有大量的学习问题，都是关于「针对数学学习请推荐好的教辅」。

其实从因果链条来说，这就存在问题。

之所以我们称之为「教辅」，是因为它是辅助教材的。

也就是说，教材是因，教辅是果。

「愚者畏果」，大多数人，本能的想要更快的得到结果，因此会往因果链条的下游走。

然而，「智者畏因」，有智慧的人，反而会追寻教材的上游原因。

如果你顺着这个思路，教育部的高中数学课程标准，就会浮出水面了。

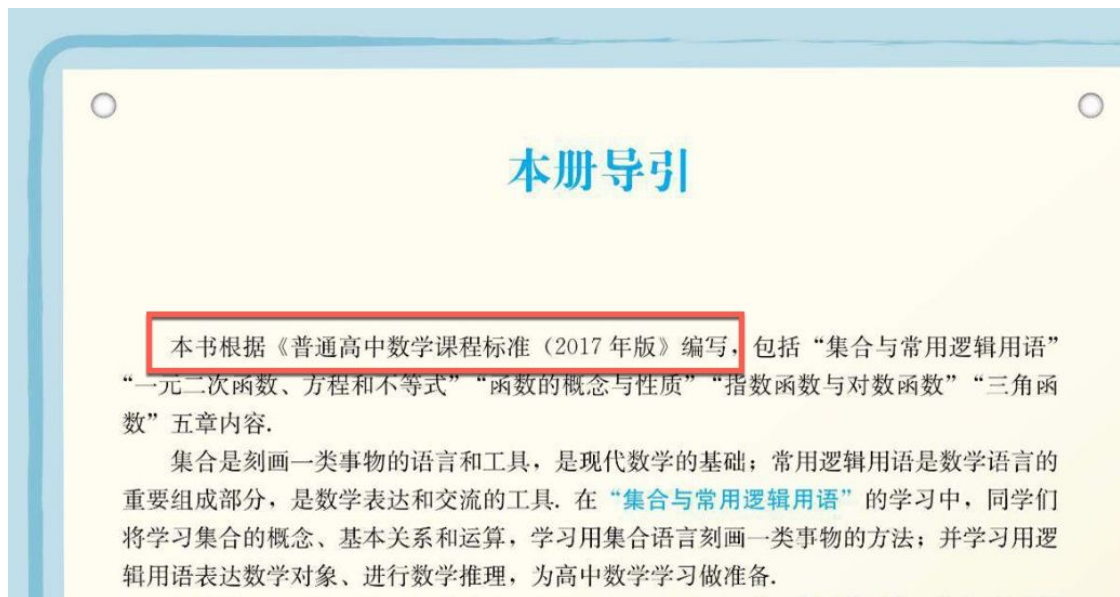
因为这个标准，才是指导高中数学课程设计、数学教材编写的宏观指南。

它是「教主」，主导教材设计和高中教学。

其实在教科书里，已经写的很清楚了。

我们看新课标 2019 高中数学 A 版教材必修一，在「本册导引」中，第一句话就是：

本书根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》编写。



如果我们把握了教材的上游原因（课标），这三者就形成了如下因果链：

教主（课程标准）→ 教材（服务于课标，课程标准的实现）→ 教辅（服务于教材，帮助理解掌握教材内容）

如果你要学习高中数学，那么也就应该遵循这条基本的因果链条，层层推进。

这样层次感就出来了。

而大多数同学，缺乏严谨的逻辑思考习惯，很容易跳跃。

通透学习 3 步游戏：一次搞定的因果链条

在第一部分，我们讨论了通透学习的 3 步游戏。

- 寻宝游戏（识别创建知识点）
- 连线游戏（识别知识之间的相互关系、提炼知识脉络）
- 占领游戏（提高对知识点的掌握度、实现对知识地图的全方位占领）

这个 3 步游戏，也就形成了一个能够实现高度掌握的因果链条。

识别创建知识点->[散点知识地图]-> 提炼知识关系与演化脉络->[知识脉络地图]-> 评估和提升知识掌握度->[知识掌握度地图]

这 3 个步骤，每一步都会生成知识地图。这些步骤和知识地图，也是环环相扣。

例如没有第一步识别创建知识点，就没有散点知识地图。而没有这张地图，后面的也就无从谈提炼知识关系，对知识点进行连线。

我们如果确保每一步高质量完成，那么最后就能得到高质量的结果，也就是对知识体系的高度掌握。

而反过来，今天大多数同学看上去每天刷题，却收效甚微，是因为他们跳跃了。

比如知识点都不能识别出来、准确的命名，就已经在刷题。

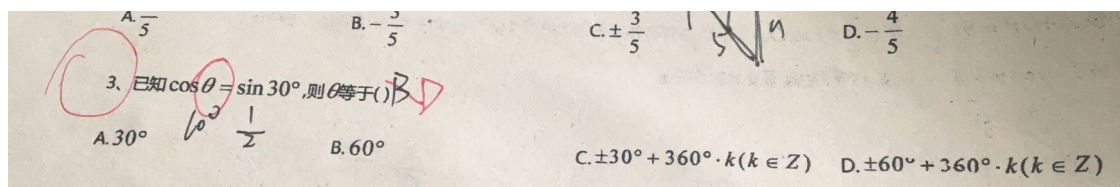
因为连知识点都没搞清楚，所以哪怕题目错了，也不知道自己到底什么知识点出了问题。

跳跃的后果：知识点不牢靠大而化之

暑假里，我辅导了一个高二同学的学习。

他在疫情之前还勉强跟得上学习，疫情后就彻底放飞自我了，成绩大幅度下跌。

我让他把最近的试卷拿出来分析，看到这么一道题目。



我就问他，你怎么看这道错题的。

他就说，这道题我填 B 是错的，正确答案应该是 D。

他本能关注的还是那个「结果」，缺乏对「原因」的反思。

于是我就进一步提问说，你觉得这个错误到底是错在哪一个知识点？

他想了想，说不出来。

注意了，这里对应到我们通透学习 3 步游戏的第一步：寻宝游戏（识别和创建知识点）。

寻宝游戏当中有一个基本的动作，就是你需要对各个知识点进行命名。

你叫不出名字，意味着对这个知识点是缺乏基本认识的。

过了一会，这位同学就说我大概知道这个知识点是啥，我翻书给你。

他就哗啦哗啦开始翻书，翻到了三角函数这一章。

最后指着书里面的一个内容说，就是这个知识点。

集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 -32° 角的终边相同。

一般地，我们有：

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和。

例 1 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角，并判定它是第几象限角。

解： $-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ$ ，所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角是 $129^\circ 48'$ ，它是第二象限角。

我就问他，那你觉得这个知识点叫什么名字？

本身这个知识点的内容是比较长的，需要用名字来做更精准的概括。

他想了一会儿说，这应该是「任意角」。

我就翻到课本的前面一页，问他说，那你觉得这个知识点叫什么名字？

图 5.1-3(1) 中的角是一个正角，它等于 750° ；图 5.1-3(2) 中，正角 $\alpha = 210^\circ$ ，负角 $\beta = -150^\circ$ ， $\gamma = -660^\circ$ 。正常情况下，如果以零时为起始位置，那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角。

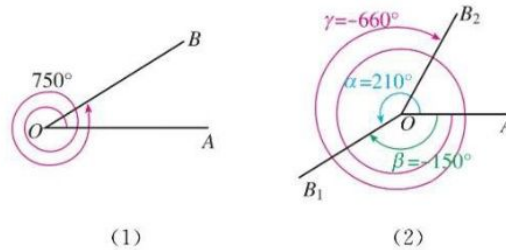


图 5.1-3

这样，我们就把角的概念推广到了任意角 (any angle)，包括正角、负角和零角。设角 α 由射线 OA 绕端点 O 旋转而成，角 β 由射线 $O'A'$ 绕端点 O' 旋转而成。如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称 $\alpha = \beta$ 。

设 α, β 是任意两个角，我们规定，把角 α 的终边旋转角 β ，这时终边所对应的角是 $\alpha + \beta$ 。

类似于实数 a 的相反数是 $-a$ ，我们引入任意角 α 的相反角的概念。如图 5.1-4，我们把射线 OA 绕端点 O 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角。角 α 的相反角记为 $-\alpha$ 。于是，像实数减法的“减去一个数等于加上这个数的相反数”一样，我们有

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

他就愣住了，不知道该怎么区分这两个知识点的命名。

我就回到他指出的第一个知识点，来提炼这个知识点的内容，对它进行命名。

集合 S 的元素；反过来，集合 S 的任一元素显然与 -32° 角的终边相同。

一般地，我们有

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和。

例 1 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角，并判定它是第几象限角。

解： $-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ$ ，所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，与 $-950^\circ 12'$ 角终边相同的角是 $129^\circ 48'$ ，它是第二象限角。

把它命名为「终边相同的角的集合」。

命名这件事情，本质上就是让你更深入的去理解知识概念，进行提炼。

但其实除了这个知识点，这道题目还涉及另外一个知识点。

就是「角的概念的拓展」。

在初中，我们对角的认识都是在 360° 度以内的，而到了高中这样一个概念拓展了。

如果对角的概念拓展有清晰认识的话，看到这道题目就很容易识别出来。

我们前面讲的这两个知识点：「终边相同的角的集合」是一个基本的概念性的知识点。而「角的概念的拓展」，是描述的概

念的演化过程，是一个过程性的知识。

从这一个案例，也可以说明为什么演化脉络特别重要，因为它是知识体系的发展规律。

你把握了发展的规律，才能更清晰的把握整个知识体系。

引申思维 5：分解细致精准

在思考、做事上的逻辑严谨，会落实到分解的细致精准上。

用数学学习为例，到底书本上有哪些知识点，这些知识点之间又有什么关系。

如果你逻辑思维观很强，那么就会追求细致、精准的分解，而不是大而化之。

反之，对于知识点以及知识关系，那通常就只有模糊的认识。

以数学为例，什么是对知识、概念有精准的理解呢？

最基本的，你看到一道题目，就能够清晰的说出到底这考察的是什么样的知识点，能够命名这样一个知识点，以及知道到底它出现在课本的什么位置。

要能精准的定位到具体的章节页面。

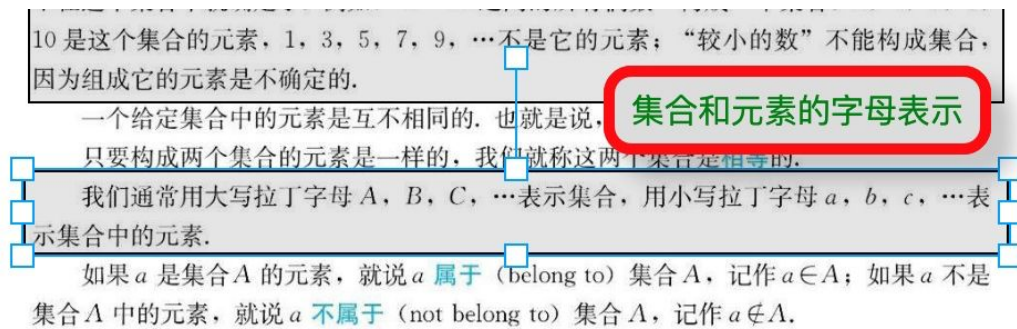
这就像送快递，我们需要精准到门牌号码一样，否则只知道这个快递送到上海徐家汇，那也难以实现使命必达了。

这里有一道简单的测试题，大家可以看看，这里面包含了多少个集合里面的知识点。

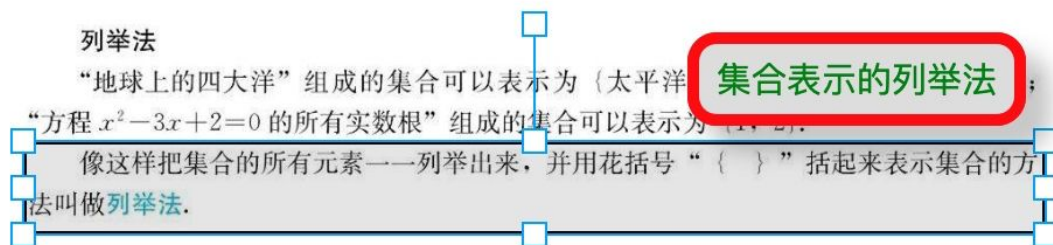
大多数同学可能只能看到一个，就是「交集」。

但这里至少还有其他两个知识点。

一个是「集合和元素的字母表示」：



另一个是「集合表示的列举法」。



这两个知识点，出现在高中数学课本的第一节。

虽然你应该已经无意识的在使用这两个知识点了，但是并没有一张精准的知识地图，对这两个知识产生清晰的觉察。

缺乏对整个知识体系的全局把控。

这就像你去旅游，看上去走了一条路线，但中间你到底都经过了什么路，是如何一步一步走到目的地的，其实很多时候你是并没有明确的觉察的。

同样的道理，这个知识体系到底怎么一层一层建立起来的，逐渐产生了哪些知识点，你也没有觉察。

没有清晰的掌握知识体系建构的逻辑链条。

每天你都坐地铁，从人民广场到徐家汇，但不代表你掌握了上海交通，这是两件事情。

可能你只知道这两点一线。

你会做题也不代表你掌握了知识体系。

反过来你掌握了知识体系，自然你就会做题。

跳过理解和建构的学习，就像尿尿团

上面案例中的这位同学，他每天的压力非常大，因为高二的科目很紧，他上课已经跟不上了，但是还在继续跟着上课的进度。

如果高一的这些基本知识点都没掌握，你可以想象高二的节奏，他怎么能跟上呢？

在旅游里面有一个词，叫做尿尿团。

就是大家出去旅游，跟着旅行团，一路打卡各种景点，每个景点下来就咔嚓咔嚓拍照，然后到下一个景点继续拍照片。

缺乏对旅途的理解和体验。

大多数同学，学习上也是这样的尿尿团风格。到景点拍照（上课记笔记、下来反复刷题），上个厕所，继续赶路（继续记笔记、刷题）。

看上去每天很忙碌，不是在旅游（学习），就是在旅游（学习）的路上。

你让他们看了 8 个景点，回头问他第一个景点第二个景点是什么呀？中间看到什么东西，有什么样的体验？

他们往往说不出来多少，只能给你看照片。照片这个外部的玩意儿，就代替了他们内心的感受和理解。

对同学们来说也是一样的，你做了一堆笔记、刷了一堆试卷，然而内心对知识建构的旅途，是空白的。

你总是被动的被导游（老师）带着走，只看到了一个个景点，却没有自己的地图和路线。

缺乏严谨逻辑的常见表现：知识点分解不够细不具体

再回到前面这位高二同学，我继续看他的试卷错题。

我看到另外一道题目，这道题目其实是在考察的初中的知识。

我就问他，这道题你觉得是错在什么知识点呢？

他说哦，这个是「函数的变换」。

我说虽然吧，这题目的确跟「函数的变换」相关。但是函数的变换是一个非常粗的概念，下面有各种情况。

到底它是哪一种类型的变换呢，请精确到更具体的知识点名称。

然后他想了想说，就是函数的变换啊。

我跟他说这道题里面至少涉及到两种变换，一个是函数的平移，一个是函数的拉伸。

然后我就问他函数的平移是在什么时候学的，什么章节学的。

他说这个学过吗？没有学过啊。

我就找了一个初中数学的目录，然后定位相关的章节给他看。

看到了，他说哦，原来是真的学过的。

你看这就是打酱油的旅游团，自己到过什么景点自己都记不得了。

哪怕拍了很多照片，做了很多题。看上去累得要死，还是什么都没真正留下。

忙乱时刻的两种本能反应

前面我们谈到「智者畏因，愚者畏果」。

在学习紧张忙乱的时候，这两种人的差异，会更明显的体现出来。

比如前面的 3 步学习流程（寻宝、连线、占领），形成了一个学习过程的因果链条。

对于一流的学习者，当他们面临重大挑战、时间紧迫的时候，往往反而会更关注按照因果流程做事，循序渐进一步一步搞定。

因为时间太紧，容错空间很低，反而要确保每一步做好，避免浪费。

这就像不大会的题目，时间紧迫，你还是需要进行分步运算，这样一步一步不容易出错。如果跳了，反而更可能啥都没了。

而大多数同学，就更加急迫的想要跳跃，直奔那个结果。

因为他们觉得没时间了，只有结果才是最重要的。

最终往往是他们总觉得自己很忙，没时间从原因入手，只能直奔主题。

最后啥都没搞定，还特别焦虑。

引申思维 6：溯本思维

如果我们热爱探索规律、上溯原因，一层一层的求因，到最后，就会追溯到这个领域、甚至跨领域的本质规律了。

当你养成了这种一层层追溯到本质，然后从本质规律、原因出发去思考问题、解决问题的时候，溯本思维观也就形成了。

在一次对 Elon Musk（特斯拉创始人）的访谈中，Musk 谈到了他思考重大问题的方式：First Principles Thinking（第一性思考）。

这个概念，最早是亚里斯多德提出来的。他说：。

在任何一个系统中，存在最基本的原则、原因、知识、假设或者科学事实，是认识的出发点，不能被省略，也不能被违反。

亚里士多德认为，需要从这些最基本的命题、假设出发，开始建构起思维体系。

对第一性思考，我翻译为溯本法，与之对应的是 Analogy（类推法）。

所谓溯本法，简单的说，就是从追溯到事物最基本的原理和法则，然后以之为出发点进行推导的思维方式。

而所谓类推法，就是其他人或者其他事物是如何如何，所以我也要如何如何。事情某些表面上看上去类似，所以其它方面也应该类似。

比如炒股，类推法的逻辑是：股市上涨，隔壁老王都赚钱了，凭什么我不能赚钱，于是就开干。

再比如传统中医有个说法，对于乳汁淤积的产妇，穿山甲可以通乳。为什么呢？穿山甲打洞可厉害了，以此类推，山都能打通，那么通乳更算不了什么了。

落到学习上，就是因为大家都是这么做的，所以我也这么做；别人上一个培训班，你就要上两个培训班。

而溯本法的逻辑是，探索股票的原理，搞清股票涨跌的本质。例如如果搞清楚买股票其实是买公司未来价值，那么就关注于「什么企业在未来有高度的价值」。巴菲特、查理·芒格的投资理念，就倾向于从本质出发，建立自己的思维框架。

转变思想：从愚者畏果到智者畏因

在变革中，最困难的往往不是后面的行动，而是第一步：改变思想。

今天同学们尽管投入大量学习时间，但成绩不佳，基本原因就在于思想的落后，而「重果轻因」是这种落后的深层次根源。

因为过度关注结果，成绩支配了你的学习，对成功的关注取代了对成长的投入，你只看到知识外部的用途却忽略了知识内在的结构，你有大量的时间刷题求果，却缺乏思考分析求因。

你需要把注意力投向学习因果链的上游，高度溯本，重新认识学习，发展出通透学习的能力，建构强大的知识体系。

你要从一个毛躁焦虑追求结果的人，变成沉着冷静追求真理的人。

要破除愚昧，要发展智慧，要穿越现象的迷雾，看到底层的因果。

就像《教父》里说的：

能够 30 秒洞察真相的人，注定拥有不同的人生。

关于整体思维、辩证思维、创新思维、主动思维的学习，请点击下面卡片阅读：

浏览器扩展 Circle 阅读模式排版，版权归 www.zhihu.com 所有